Фаерман Владимир Андреевич, студент Института кибернетики ТПУ.
E-mail: TheUnit@sibmail.com
Область научных интересов: математическое моделирование систем автоматического управления, автоматизированное проектирование электронных устройств.
Яковлева Елена Максимов-на, канд. техн. наук, доцент кафедры автоматики и компьютерных систем Института кибернетики ТПУ.
E-mail: yakovlevaem@tpu.ru
Область научных интересов: автоматизация проектиро-вания печатных плат электронных устройств в САПР DipTrace и Catia с 3-х мерным изображением.

УДК 004.021

ПОЛУЧЕНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ MATHCAD

В.А. Фаерман, Е.М. Яковлева

Томский политехнический университет
E-mail: TheUnit@sibmail.com

Предложено применение математического пакета Mathcad 15 к получению передаточных функций (в операторной *z*-форме) типовых одноконтурных импульсных систем, имеющих произвольный типовой импульсный элемент на выходе сравнивающее-суммирующего устройства, с известной передаточной функцией непрерывной части.

Ключевые слова:
Импульсные системы, z-преобразование, импульсные элементы, Mathcad, импульсные передаточные функции, формирующие элементы.

Key words: Pulse systems, z-transfer, pulse elements, Mathcad, pulse transfer functions, forming units.

Введение

Возможности современной вычислительной техники позволяют выполнять численными методами детальный анализ систем автоматического управления, сопоставимый с результатами физического макетирования. Для анализа или синтеза, необходима математическая модель адекватно описывающая систему. Современное программное обеспечение позволяет существенно упростить процесс моделирования различных систем автоматического управления. Линейной импульсной системой называется такая система автоматического управления, которая кроме звеньев, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, содержит импульсный элемент, преобразующий непрерывное входное воздействие в последовательность импульсов. Одноконтурную импульсную систему автоматического управления можно представить как взаимодействующие друг с другом импульсную и непрерывную (НЧ) части систем автоматического управления (САУ). В непрерывную часть обычно входит объект управления, а также усилительное и исполнительное устройства. Импульсная часть (ИЧ), как правило, является управляющим устройством и объединяет функциональные элементы, участвующие в импульсном преобразовании сигнала. В процессе преобразования непрерывного сигнала в дискретный импульсный элемент выполняет две операции – квантование по времени и импульсную модуляцию. Первая заключается в том, что сигнал на выходе импульсного элемента появляется в определенные дискретные, обычно равноотстоящие моменты времени $t_i = T \cdot i$. В результате импульсной модуляции изменяется какой-либо параметр выходного импульса (амплитуда, ширина и т. д.) в зависимости от входного сигнала. В зависимости от изменяемого параметра импульса различают разнообразные виды модуляции: широтно-импульсная модуляция (ШИМ), амплитудно-импульсная модуляция (АИМ) и другие. При амплитудно-импульсной модуляции изменяемым параметром служит амплитуда импульсов, которая обычно пропорциональна значению непрерывного сигнала $g(Ti)$ в моменты времени Ti. При широтно-импульсной модуляции модулируемым параметром является ширина (длительность) импульсов, амплитуда при этом остается постоянной. Системы, в которых присутствует ШИМ относятся к классу нелинейных импульсных систем [1].

Основным отличием импульсных систем от непрерывных является прохождение сигнала только в определенные, дискретные моменты времени, поэтому непрерывная часть реагирует лишь на дискретные значения непрерывного сигнала в моменты квантования nT. Поэтому непрерывную функцию $x(t)$, описывающую непрерывный сигнал, можно заменить соответствующей решетчатой функцией $x(nT)$, где n – целое. Если интервал квантования T задан, то по функции $x(t)$ решетчатая функция $x(nT)$ определяется однозначно. Соотношение между решетчатой функцией $x(n)$ и ее разностью $\Delta^k x(n)$ определяет уравнение в конечных разностях или разностное уравнение. Если это соотношение линейно, то разностное уравнение называется линейным. Оно может быть представлено как

$$a_k\Delta^k(n) + a_{k-1}\Delta^{k-1}(n) + \cdots + a_o x(n) = f(n) \quad (1)$$

$$b_k x(n+k) + b_{k-1}x(n+k-1) + \cdots + b_0 x(n) = f(n), \quad (2)$$

где $f(n)$ – известная решетчатая функция, $x(n)$ – искомая решетчатая функция, представляющая собой решение разностного уравнения. Данное разностное уравнение, содержащее $x(n)$ и $x(n+k)$, называется разностным уравнением k-ого порядка. В том случае, когда $f(n)=0$, уравнения (1) и (2) называются однородными [2].

Классические методы решения разностных уравнений во многом аналогичны классическим методам решения дифференциальных уравнений. В частности, общее решение неоднородного линейного разностного уравнения может быть представлено в виде суммы общего решения однородного разностного уравнения (свободной составляющей) и частного решения неоднородного разностного уравнения (вынужденной составляющей).

$$x(n) = x_{св}(n) + x_{пр}(n). \quad (3)$$

Свободная составляющая решения (3) определяется из характеристического уравнения и имеет вид

$$x_{св}(n) = \sum_{i=1}^{k} C_i\, z_i{}^n ,$$

где C_i – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. Вынужденная составляющая определяется видом правой части уравнения и может быть найдена, для многих типовых функций, методом подбора. Решением разностного уравнения $x(n)$ является решетчатая функция существующая в моменты времени Tn, что соответствует наличию ключа на выходе системы. В реальных системах ключ отсутствует, поэтому выходной сигнал является непрерывной функцией, которая может быть восстановлена из $x(n)$. Несмотря на то, что решение уравнений состояния (как аналитическое, так и численное) не представляет сложности, широкого применения на практике оно не находит. Это объясняется трудностями, связанными с получением разностных уравнений из дифференциальных уравнений непрерывной части. В ряде случаев разностные уравнения непрерывных звеньев получают из их импульсных передаточных функций [1, 3].

Для исследования линейных импульсных систем, на практике обычно применяются передаточные функции, являющиеся отношением операторных изображений выходного и входного сигналов системы. Так как в импульсных системах сигналы существуют в моменты времени iT, то есть являются дискретными, то передаточные функции называются импульсными и определяются как [2]:

$$W(z) = \frac{X_{вых}(z)}{G_{вх}(z)}.$$

Для решетчатых функций может быть введено дискретное преобразование Лапласа, определяемое формулой [1]:

$$F(p) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot e^{-piT} . \quad (4)$$

В случае, если (4) сходится при $Re(p) < \infty$ то оригиналу $f(i)$ соответствует некоторое изображение $F(p)$. Под z-преобразованием понимают изображение функции, определяемое следующим образом

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \cdot z^{-i}. \quad (5)$$

Изображение существует и соответствует оригиналу, если ряд (5) сходится. Дискретные преобразования связаны соотношением $e^{-pT} = z$. Формула z-преобразования может быть записана также для непрерывной функции в виде

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f(t_i) \cdot z^{-i}, \; t_i = iT. \quad (6)$$

Согласно (5) и (6) оригиналом $W(z)$ должна служить импульсная переходная функция $w(t)$

$$W(z) = \sum_{i=0}^{\infty} w(iT) \cdot z^{-i}. \quad (7)$$

1. Формирующие элементы в импульсных системах

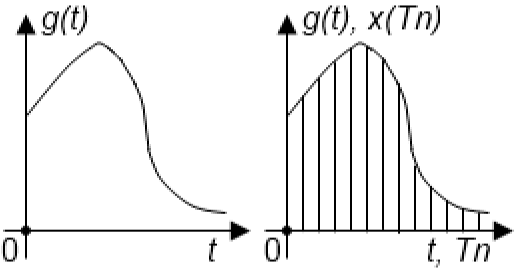

Рис. 1. Идеальный ключевой элемент

В импульсных системах, используются различные импульсные элементы, которые принято описывать как последовательное соединение идеального импульсного элемента (ключа) и формирующего элемента. Идеальный импульсный элемент под воздействием непрерывного входного сигнала $g(t)$ формирует идеальные мгновенные импульсы $x(Tn)$ вида σ-функций (рис. 1). Формирующий элемент преобразует эти импульсы в сигналы $x(t)$ нужной формы.

При описании импульсных систем используются различные формирующие элементы, имеющие отличные математические описания и характеристики, влияющие на импульсную передаточную функцию системы. Наиболее распространены экстраполяторы нулевого и первого порядков, а также интерполяторы первого порядка.

Экстраполятор нулевого порядка удерживает на выходе величину, равную g_i в течение всего периода T (рис. 2). Взяв реакцию элемента на отдельное замыкание ключа (рис. 3), получим прямоугольный импульс. Математически он может быть описан следующей функцией:

$$x_n(t) = \begin{cases} g_n, & t \in (T_n, T_{n+1}) \\ 0, & otherwise \end{cases} = g_n(1(t_n) - 1(t_n - T)) \quad (8)$$

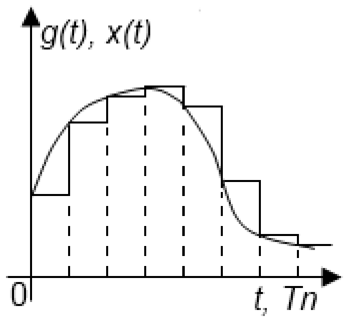

Рис. 2. Экстраполятор 0-ого порядка

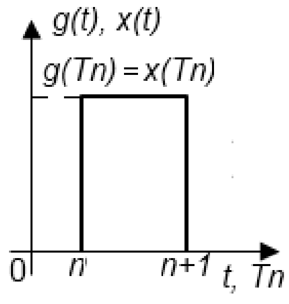

Рис. 3. Реакция на один импульс

Используя выражения (8), (4–5) составим передаточную функцию формирующего элемента

$$W_{фэ}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s} \quad (9)$$

Совершив замену в (9) $e^{sT} = z$ получим

$$W_{фэ}(s, z) = \frac{1-z^{-1}}{s} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{s}.$$

Таким образом, экстраполятор нулевого порядка можно представить как два блока, один из которых можно включить в непрерывную часть. Экстраполятор первого порядка может быть представлен через преобразователь нулевого порядка следующим образом

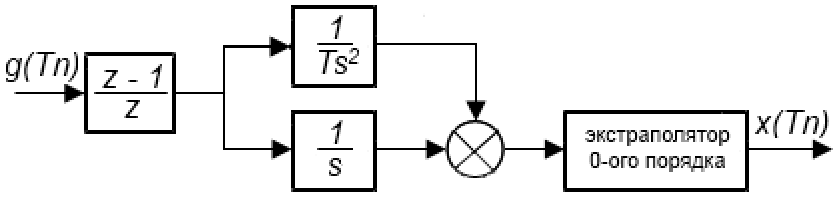

Рис. 4. Экстраполятор первого порядка

Аналогично экстраполятор второго порядка может быть представлен через экстраполятор первого порядка и так далее. Таким образом, в виде соединения непрерывного и импульсного блока, может быть представлен любой типовой формирующий элемент (интерполятор или экстраполятор любого порядка) [4].

$$W_{фэ}(s, z) = W_{фэ}^{неп}(s) \cdot W_{фэ}^{имп}(z) \tag{10}$$

Представление (10) импульсного элемента упрощает получение импульсной передаточной функции системы с помощью Mathcad.

2. Получение передаточной функции линейных импульсных систем в Mathcad

Для удобства нахождения импульсных передаточных функций замкнутой системы по задающему воздействию, по ошибке и др., удобно начать с передаточной функции разомкнутой системы. Пусть имеем одноконтурную систему (рис. 5), содержащую импульсный элемент, расположенный после сравнивающе-суммирующего устройства; а также непрерывную часть, включающую усиливающие устройства, объект управления в прямой цепи; корректирующие устройства, расположенные в цепи обратной связи.

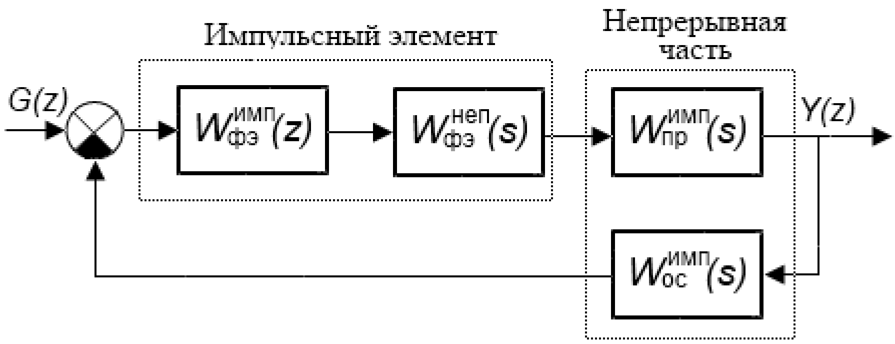

Рис. 5. Одноконтурная импульсная система

Выходной сигнал непрерывной системы $y(t)$, при нулевых начальных условиях, определяется как свертка входного $x(t)$ сигнала (задающего воздействия) и импульсной передаточной функции (весовой функции) $w(t)$

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)x(\tau)d\tau, \tag{11}$$

где весовая функция $w(t)$ – реакция системы на функцию Дирака. Весовая функция системы $w(t)$ является оригиналом передаточной функции непрерывной системы $W(s)$, то есть связана с ней обратным преобразованием Лапласа. Следовательно, для того, чтобы перейти от непрерывного преобразования Лапласа к дискретному преобразованию достаточно проделать следующие действия [3]:

1. Определить передаточную функцию разомкнутой системы, с учетом формирующего элемента (14):
$$W_{прс}(s) = W_{фэ}^{неп}(s) \cdot W_{пр}^{неп}(s) \cdot W_{ос}^{неп}(s). \tag{12}$$

2. С помощью обратного преобразования Лапласа (согласно (11)) можно найти импульсную переходную функцию разомкнутой системы
$$w(t) = L_{-1}\{W_{\text{прс}}(s)\}. \tag{13}$$

3. Согласно (6), определить весовую последовательность системы (решетчатую функцию веса):
$$w(nT) = w(t)|_{t\,=\,Tn.} \tag{14}$$

4. Согласно (7), применить прямое дискретное преобразование Лапласа
$$W^0{}_{\text{рс}}(z) = Z\{w(nT)\}. \tag{15}$$

5. Согласно схеме (рис. 8) домножить выражение (19) на $W_{фэ}^{имп}(z)$
$$W_{\text{рс}}(z) = W^0{}_{\text{рс}}(z) \cdot W_{фэ}^{имп}(z).$$

Получение передаточной функции разомкнутой линейной импульсной системы в ППП Mathcad, согласно действиям, перечисленным выше, выполняется следующим образом: первые четыре пункта реализуются участком программы, представленным на рис. 6, пятый пункт реализуется участком, представленным на рис. 7.

$$W(z) := W(s) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace} \\ \text{substitute}, t = T \cdot n \\ \text{ztrans} \end{array} \right.$$

Рис. 6. *s*-*z* преобразование

$$Wpc(z) := W(z) \cdot Wimp(z) \text{ simplify } \rightarrow$$

Рис. 7. Получение передаточной функции

где *invlaplace* ($W(s)$) – выполняется символьно и реализует (13);
substitute, $t = Tn$ – выполняется символьно, реализует (14);
ztrans ($w(Tn)$) – выполняется символьно, реализует (15);
simplify ($W(z)$) – выполняется символьно, упрощает выражение-аргумент (в данном случае сокращает подобные множители).

Функции, указанные в рис. 6 и 7, могут быть найдены на символьной панели инструментов (вызывается через меню окна приложения следующим образом Вид – Панели Инструментов – Символьные) или в меню вставки функции (вызывается иконкой $f(x)$ в строке инструментов окна приложения) в разделе – Только аналитические (symbolic only).

Форма, в которой будет получено решение, неудобна для работы и нуждается в дальнейших преобразованиях (ввиду численного решения возникают коэффициенты, порядок которых может достигать нескольких десятков). Для того чтобы представить полученную функцию в удобном для дальнейшего исследования системы виде:

$$W_{\text{рс}}(z) = \frac{\sum_i^k b_i z^i}{\sum_j^m a_j z^j}\,. \tag{16}$$

Либо:

$$W_{\text{рс}}(z) = \frac{\sum_i^k b_i z^i}{\prod_j^m (z - z_j)} \tag{17}$$

достаточно найти коэффициенты $a_i, i = \overline{0,m}$; $b_i, i = \overline{0,k}$; и корни характеристического уравнения z_i, $i = \overline{0,k}$. Для того, чтобы представить передаточную функцию в виде (16) можно воспользоваться участком программы, представленным на рис. 8; а для (17) необходимо вопользоваться участком программы, представленным на рис. 9.

$$B := \text{numer}(W(z))\ \text{coeffs}\ \rightarrow$$
$$A := \text{denom}(W(z))\ \text{coeffs}\ \rightarrow$$
$$B := \text{Round}\left(\frac{B}{A_{\text{rows}(A)-1}}, 10^{-7}\right)$$
$$A := \text{Round}\left(\frac{A}{A_{\text{rows}(A)-1}}, 10^{-13}\right)$$
$$W(z) := \frac{\sum_{i=0}^{\text{rows}(B)-1} \left(B_i \cdot z^i\right)}{\sum_{i=0}^{\text{rows}(A)-1} \left(A_i \cdot z^i\right)}$$

Рис. 8. Получение передаточной функции в форме (16)

$$B := \text{numer}(W(z))\ \text{coeffs}\ \rightarrow$$
$$A := \text{denom}(W(z))\ \text{coeffs}\ \rightarrow$$
$$B := \frac{B}{A_{\text{rows}(A)} - 1} \quad C := \text{polyroots}(B)$$
$$A := \text{Round}\left(\frac{A}{A_{\text{rows}(A)-1}}, 10^{-13}\right)$$
$$W(z) := \frac{\sum_{i=0}^{\text{rows}(B)-1} \left(B_i \cdot z^i\right)}{\prod_{i=0}^{\text{rows}(C)-1} \left(z - C_i\right)}$$

Рис. 9. Получение передаточной функции в форме (17)

где *denom*(*W*(z)) – выполняется символьно, возвращает знаменатель дробно-рационального выражения; *numer*(*W*(z)) – выполняется символьно, возвращает числитель дробно-рационального выражения; *coeffs* (*A*(z)) – выполняется символьно, возвращает коэффициенты полинома; *polyroots* (*A*) – возвращает вектор корней полинома по его коэффициентам; *round* (*x*, ε) – округляет x с точностью до ε. Формализация округления коэффициентов упрощает дальнейшее получение импульсной передаточной функции замкнутой системы.

Если необходимо сделать процесс преобразования более наглядным, можно предварительно использовать функцию *parfrac* (*W*(z)) (выполняется символьно, представляет дробно-рациональное выражение в виде суммы элементарных дробей). В дальнейшем предложенный алгоритм преобразования (кроме шага 5) может последовательно применяться к каждой из элементарных дробей.

Для того чтобы получить передаточную функцию замкнутой системы, можно воспользоваться выражением [3]

$$W_{зам}(z) = \frac{W_{пр}(z)}{1 + W_{pc}(z)}, \tag{18}$$

где $W_{пр}(z) -$ *и*мпульсная передаточная функция прямой цепи, которая определяется по предложенному выше алгоритму, с учётом выражения:

$$W_{пр}(s) = W_{фэ}^{неп}(s) \cdot W_{пр}^{неп}(s).$$

Для упрощения преобразования (18) как вручную, так и с помощью Mathcad, удобно представить $W_{пр}(z)$ и $1 + W_{pc}(z)$ в виде (17), используя участок программы, представленный на рис. 10. Аналогичным образом может быть найдена импульсная передаточная функции системы по ошибке регулирования по задающему воздействию. При этом вместо выражения (18) следует использовать выражение

$$W_\varepsilon(z) = \frac{1}{1+W_{pc}(z)}.$$

$$\text{Wзам}(z) := \frac{\text{Wпр}(z)}{1+\text{Wpc}(z)} \text{ simplify } \rightarrow$$

$$\text{Bзам} := \text{numer}(\text{Wзам}(z)) \text{ coeffs } \rightarrow$$

$$\text{Aзам} := \text{denom}(\text{Wзам}(z)) \text{ coeffs } \rightarrow$$

$$\text{Aзам} := \text{Round}\left(\frac{\text{Aзам}}{\text{Aзам}_{\text{rows(Aзам)}-1}}, 10^{-13}\right)$$

$$\text{Bзам} := \text{Round}\left(\frac{\text{Bзам}}{\text{Aзам}_{\text{rows(Aзам)}-1}}, 10^{-7}\right)$$

$$\text{Wзам}(z) := \frac{\sum\limits_{i=0}^{\text{rows(Bзам)}-1}\left(\text{Bзам}_i \cdot z^i\right)}{\sum\limits_{i=0}^{\text{rows(Aзам)}-1}\left(\text{Aзам}_i \cdot z^i\right)}$$

Рис. 10. Получение передаточной функции замкнутой системы

В качества примера найдем передаточную функцию разомкнутой импульсной системы автоматического регулирования (САР) частоты вращения двигателя постоянного тока, структурная схема которой приведена на рис. 11. Численные значения параметров системы приведены в таблице.

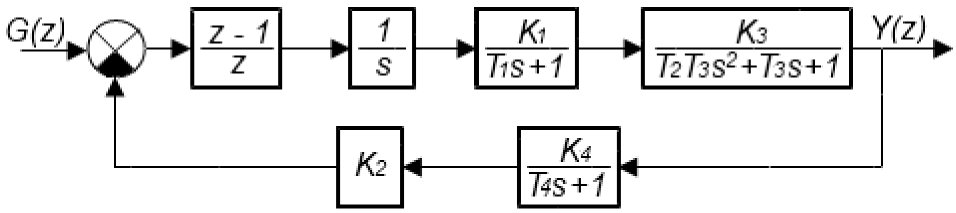

Рис. 11. Структурная схема САУ двигателем постоянного тока

Таблица. Значения параметров САР

Параметр	K_1	K_2	K_3	K_4	T_1	T_2	T_3	T_4	T
Значение	18,75	20	1,6	0,02	0,06	0,02	0,3	0,01	0,157

Согласно (12) найдем выражение для приведенной непрерывной части разомкнутой системы

$$W_{pc}(s) = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4}{s \cdot (T_2 \cdot T_3 \cdot s^2 + T_3 \cdot s + 1)(T_1 \cdot s + 1)(T_4 \cdot s + 1)}.$$

Выполнив операции, приведенные на рис. 6, 7, получим следующий результат

$$Wpc(z) \rightarrow \frac{0.039 \cdot z + 2.087 \cdot z^2 + 2.665 \cdot z^3 + 2.198 \times 10^{-6}}{(z - 0.569) \cdot (z - 0.073) \cdot \left(z - 1.519 \times 10^{-7}\right) \cdot \left(z - 6.849 \times 10^{-4}\right)}$$

Рис. 12. Получение передаточной функции

Проделав операции, приведенные на рис. 8 получим результат в форме (17)

$$Wpc(z) \rightarrow \frac{0.039 \cdot z + 2.087 \cdot z^2 + 2.665 \cdot z^3 + 2.198 \times 10^{-6}}{-2.848 \times 10^{-5} \cdot z + 0.042 \cdot z^2 + -0.643 \cdot z^3 + z^4 + 4.325 \times 10^{-12}}$$

Рис. 13. Передаточная функция в форме (17)

Данный результат был использован для получения импульсных передаточных функций замкнутой системы и по ошибке регулирования. Достоверность использования данного алгоритма получения импульсных передаточных функций может быть подтверждена моделированием в ППП Matlab.

Заключение

Сейчас с применением современного программного обеспечения возможно решение широкого спектра задач моделирования и анализа импульсных систем. В настоящей работе было продемонстрировано применение математического пакета Mathcad 15 к получению передаточной функции одноконтурной линейной импульсной системы автоматического управления по известной передаточной функции непрерывной части. Предложенный алгоритм может быть использован для упрощения решения задач синтеза линейных импульсных систем с заданными требованиями, а также для упрощения процесса получения разностного уравнения непрерывной части импульсной САУ. Последнее актуально при моделировании систем с широтно-импульсной модуляцией, требующем численного решения системы разностных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. – СПб.: Профессия, 2004. – 767 с.
2. Яковлева Е. М., Замятин С. В. Курсовое проектирование по теории автоматического управления. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 106 с.
3. Теория автоматического управления / под ред. А. А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. – 367 с.
4. Чечурин Л.С. Курс лекций по ТАУ: дискретные динамические объекты. URL: http://chechurin.com/book_tau/contents/p1_lecture2.html/ (дата обращения 26.06.2011).

Поступила 30.06.2011 г.